Matematyka

Zadanie 1.

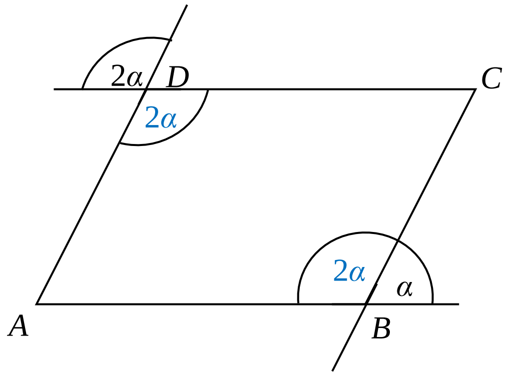
Poprawna odpowiedź
B

Wyjaśnienie

Zadanie sprawdza, czy potrafisz skorzystać z własności kątów wierzchołkowych, przyległych i naprzemianległych oraz własności równoległoboku do obliczenia miary wskazanego kąta.

Sposób 1.

- W pierwszej kolejności skorzystaj z twierdzenia o równości kątów wierzchołkowych. Wynika z niego, że kąt *ADC* równoległoboku ma miarę 2α.
- Przeciwległe kąty równoległoboku maję równe miary, zatem kąt *ABC* ma miarę 2α.



- Zauważ, że kąt przyległy do kąta o mierze 2α ma miarę α, zatem:

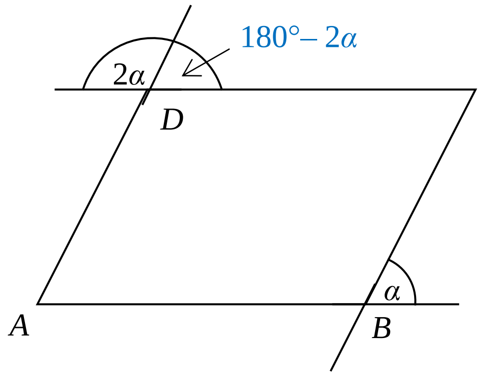
  $2\alpha + \alpha = 180°$

  $3\alpha = 180°$

  $\alpha = 60°$

Sposób 2.

- W pierwszej kolejności wskaż kąt przyległy do kąta 2α. Ma on miarę $(180° - 2\alpha)$.



- Zauważ, że kąty o miarach $(180° - 2\alpha)$ oraz α to kąty odpowiadające, zatem:

  $180° - 2\alpha = \alpha$

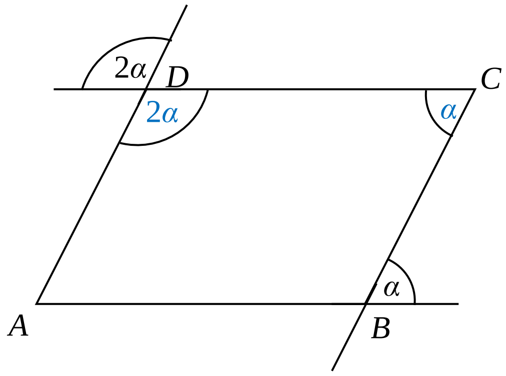
$3\alpha = 180°$

$\alpha = 60°$

Sposób 3.

- W pierwszej kolejności skorzystaj z twierdzenia o równości kątów wierzchołkowych. Wynika z niego, że kąt ADC równoległoboku ma miarę 2α.

- Zauważ, że kąty BCD i α są kątami naprzemianległymi ($AB \parallel CD$), zatem mają równe miary.



- Na podstawie własności kątów równoległoboku mamy:

  $2\alpha + \alpha = 180°$

  $3\alpha = 180°$

  $\alpha = 60°$

Zadanie 2.

Poprawna odpowiedź
C

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz zastosować nierówność trójkąta, żeby ocenić, z których trzech odcinków można zbudować trójkąt.

- Trzy odcinki są długościami boków trójkąta tylko wtedy, gdy najdłuższy spośród nich jest krótszy od sumy długości dwóch pozostałych.
  Wybierz najdłuższy z boków i porównaj jego długość z sumą długości dwóch krótszych boków:

  - 9 cm ? 3 cm + 5 cm
9 cm > 8 cm – nierówność trójkąta nie jest spełniona

  - 9 cm ? 4 cm + 5 cm
9 cm = 9 cm – nierówność trójkąta nie jest spełniona

- 9 cm ? 8 cm + 5 cm
  9 cm < 13 cm – nierówność trójkąta jest spełniona

- 15 cm ? 9 cm + 5 cm
  15 cm > 14 cm – nierówność trójkąta nie jest spełniona

Zadanie 3.

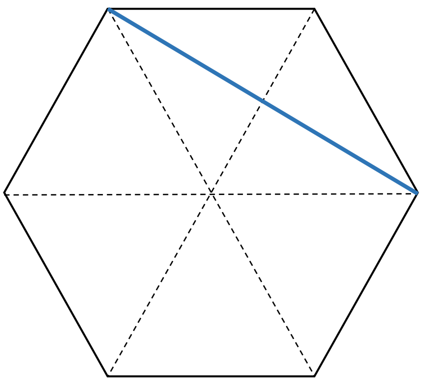
Poprawna odpowiedź
PP

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz zastosować twierdzenie Pitagorasa do obliczenia długości odcinków w sześciokącie foremnym oraz pola tego sześciokąta.

Pierwsze zdanie:

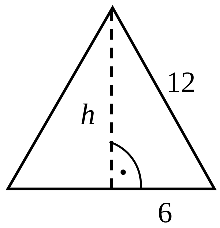
Sposób 1.

- Zauważ, że najdłuższe przekątne sześciokąta foremnego dzielą go na sześć trójkątów równobocznych, każdy o boku długości 12 cm.



- Zauważ, że długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego jest równa sumie długości dwóch wysokości trójkąta równobocznego o boku 12 cm.

- Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku 12 cm:



$h^2 + 6^2 = 12^2$
$h^2 = 144 - 36$
$h^2 = 108$
$h = \sqrt{108}$
$h = 6\sqrt{3}$ (cm)

- Następnie oblicz długość szukanej przekątnej: $6\sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$ (cm)

Sposób 2.

- Zauważ, że sześciokąt foremny zbudowany jest z sześciu trójkątów równobocznych każdy o boku długości 12 cm.
- Zauważ, że długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego jest równa sumie długości dwóch wysokości trójkąta równobocznego o boku 12 cm.
- Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku 12 cm, korzystając ze wzoru:

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, gdzie *a* – długość boku trójkąta

$h = \frac{12\sqrt{3}}{2}$

$h = 6\sqrt{3}$ (cm)

- Następnie oblicz długość szukanej przekątnej: $6\sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$ (cm)

Drugie zadanie:

Sposób 1.

- Aby sprawdzić, czy to zdanie jest prawdziwe czy fałszywe oblicz pole trójkąta równobocznego o boku długości 12 cm, korzystając ze wzoru:

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie *a* – długość boku trójkąta

$P = \frac{12^2\sqrt{3}}{4}$

$P = 36\sqrt{3}$ (cm^2)

- Następnie oblicz pole sześciokąta foremnego:
  $6 \cdot 36\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$ (cm^2)

Sposób 2.

- Zauważ, że pole trójkąta równobocznego o boku długości 12 cm możesz obliczyć, korzystając ze wzoru:

$P = \frac{1}{2} a \cdot h$, gdzie *a* – długość boku trójkąta, *h* – wysokość trójkąta

$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3}$

$P = 36\sqrt{3}$ (cm^2)

- Następnie oblicz pole sześciokąta foremnego:

  $6 \cdot 36\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$ (cm^2)

Zadanie 4.

Poprawna odpowiedź
AC

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz zastosować własności trapezu równoramiennego i twierdzenie Pitagorasa do obliczenia pola i obwodu trapezu.

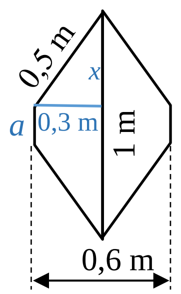
Pierwsze zdanie:

- Zauważ, że blat stołu przedstawionego na rysunku I zbudowany jest z dwóch trapezów równoramiennych, których wysokość jest równa:
  $h = 0{,}6 : 2 = 0{,}3$ (m)

- Oblicz, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość krótszej podstawy a tego trapezu:

  $x^2 + (0{,}3)^2 = (0{,}5)^2$
  $x^2 = 0{,}25 - 0{,}09$
  $x = \sqrt{0{,}16}$
  $x = 0{,}4$ (m)

  $a = 1 - 2 \cdot 0{,}4 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ (m)



- Następnie oblicz powierzchnię blatu stołu przedstawionego na rysunku I:

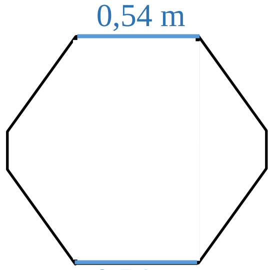
  $P = 2 \cdot \frac{(a+b)}{2} \cdot h$, gdzie b – długość dłuższej podstawy trapezu

  $P = 2 \cdot \frac{(0{,}2+1)}{2} \cdot 0{,}3$
  $P = 1{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}36$ (m^2)

Drugie zdanie:

- Zauważ, że obwód stołu przedstawionego na rysunku II jest dłuższy od obwodu stołu przedstawionego na rysunku I o dwa odcinki o długości 0,54 m.

0,54 m + 0,54 m = 1,08 m



Zadanie 5.

Przykładowe rozwiązania

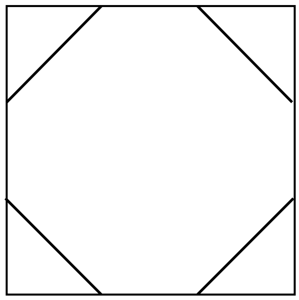
Sposób 1.

Pole ośmiokąta jest różnicą pola kwadratu i sumy pól czterech przystających trójkątów prostokątnych, zatem:

$$P = 12^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$$

$$P = 144 - 32$$

$$P = 112 \ (\text{cm}^2)$$



Odpowiedź: Pole tego ośmiokąta jest równe 112 cm^2.

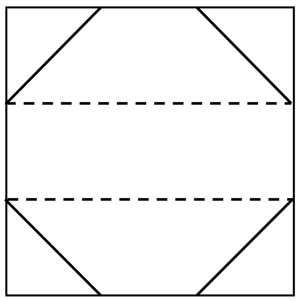
Sposób 2.

Ośmiokąt zbudowany jest z dwóch przystających trapezów równoramiennych i prostokąta, zatem pole ośmiokąta możemy obliczyć jako sumę pól tych wielokątów:

$$P = 2 \cdot \frac{(4+12)\cdot 4}{2} + 12 \cdot 4$$

$$P = 64 + 48$$

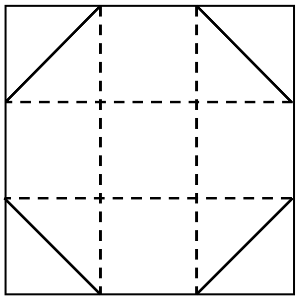
$$P = 112 \ (\text{cm}^2)$$



Odpowiedź: Pole tego ośmiokąta jest równe 112 cm^2.

Sposób 3.

Jeśli każdy z boków kwadratu podzielono na 3 równe części, to kwadrat można podzielić na 9 mniejszych kwadratów.
Z czterech przystających trójkątów prostokątnych (naroża dużego kwadratu) można zbudować 2 mniejsze kwadraty.



Zatem pole ośmiokąta stanowi $\frac{7}{9}$ pola wyjściowego kwadratu:

$$P = \frac{7}{9} \cdot 12^2$$

$$P = 112 \ \ (\text{cm}^2)$$

Odpowiedź: Pole tego ośmiokąta jest równe 112 cm^2.

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz obliczyć pole wielokąta metodą podziału na mniejsze wielokąty lub uzupełnienia do większych wielokątów.

Pamiętaj, jest to zadanie otwarte. Na egzaminie we wskazanym miejscu umieść pełne rozwiązanie.

Zadanie 6.

Przykładowe rozwiązania

Sposób 1.

Zauważ, że trójkąt *ABO* jest trójkątem równoramiennym. Zatem kąt *ABO* ma również miarę 45°, a trójkąt *ABO* jest prostokątny. Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$AO^2 + BO^2 = AB^2$$
$$5^2 + 5^2 = AB^2$$
$$AB = 5\sqrt{2} \ \ (\text{cm})$$

Odpowiedź: Cięciwa *AB* ma długość $5\sqrt{2}$ cm.

Sposób 2.

Zauważ, że trójkąt *ABO* jest połową kwadratu o boku 5 cm, a odcinek *AB* jego przekątną.

$$AB = 5\sqrt{2} \ (\text{cm})$$

Odpowiedź: Cięciwa *AB* ma długość $5\sqrt{2}$ cm.

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz zastosować twierdzenie Pitagorasa i własności trójkąta równoramiennego do obliczenia długości wskazanego odcinka.

Pamiętaj, jest to zadanie otwarte. Na egzaminie we wskazanym miejscu umieść pełne rozwiązanie.

Zadanie 7.

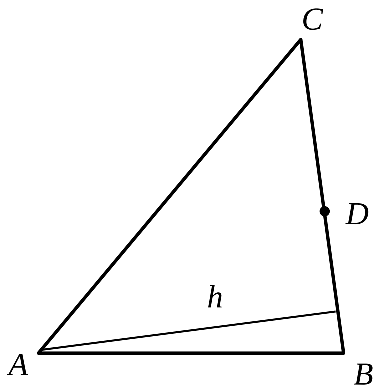
Przykładowe rozwiązania

Sposób 1.

Ponieważ punkt *D* jest środkiem boku *BC*, zatem *BD* = *DC*, czyli trójkąty *ABD i ADC* mają podstawy o takich samych długościach. Trójkąty te mają również tę samą wysokość.
Stąd wynika, że mają jednakowe pola powierzchni.

Sposób 2.

Wprowadź oznaczenie *a* = *BD* = *DC*. Zaznacz na rysunku wysokość trójkąta *ABC*.



Zauważ, że wysokość trójkąta *ABC* jest jednocześnie wysokością trójkątów *ABD* i *ADC*.
Zapisz wzory na pola trójkątów *ABD* oraz *ADC*:

$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot h$$

Stąd wynika, że:

$$P_{ABD} = P_{ADC}$$

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz przeprowadzić proste rozumowanie – uzasadnić równość pól dwóch trójkątów.

Pamiętaj, jest to zadanie otwarte. Na egzaminie we wskazanym miejscu umieść pełne rozwiązanie.

Zadanie 8.

Przykładowe rozwiązania

Sposób 1.

x – długość dłuższej przekątnej rombu
$0{,}75x$ – długość krótszej przekątnej rombu

Pole rombu można opisać wyrażeniem $\frac{1}{2}\cdot x\cdot 0{,}75x$, zatem

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot 0{,}75x = 96$$
$$0{,}375x^2 = 96$$
$$x^2 = 256$$
$$x = 16$$

$$0{,}75x = 12$$

Przekątne rombu (12 cm, 16 cm) są prostopadłe i dzielą się na połowy. Długość boku rombu oblicz z twierdzenia Pitagorasa:

$$6^2 + 8^2 = a^2$$
$$36 + 64 = a^2$$
$$a^2 = 100$$
$$a = 10$$

Obwód rombu jest równy $4a = 4 \cdot 10$ cm $= 40$ cm

Odpowiedź: Obwód rombu jest równy 40 cm.

Sposób 2.

y – długość krótszej przekątnej rombu
$\frac{4}{3}y$ – długość dłuższej przekątnej rombu

$$\frac{1}{2}\cdot y\cdot \frac{4}{3}y = 96$$
$$\frac{2}{3}y^2 = 96$$
$$y^2 = 144$$
$$y = 12$$

$$\frac{4}{3}y = 16$$

Przekątne rombu (12 cm, 16 cm) są prostopadłe i dzielą się na połowy, stąd oblicz długość boku rombu:

$$6^2 + 8^2 = a^2$$
$$36 + 64 = a^2$$
$$a^2 = 100$$
$$a = 10$$

Obwód rombu jest równy $4a = 4 \cdot 10$ cm = 40 cm

Odpowiedź: Obwód rombu jest równy 40 cm.

Wyjaśnienie
Zadanie sprawdza, czy potrafisz zastosować wzór na pole rombu do wyznaczenia długości jego przekątnych oraz twierdzenie Pitagorasa do obliczenia długości boku rombu.

Pamiętaj, jest to zadanie otwarte. Na egzaminie we wskazanym miejscu umieść pełne rozwiązanie.